Proceedings of IAM, V.4, N.1, 2015, pp.16-19

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПОЧКИ ВОЛЬТЕРРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ*

Аг. Х. Ханмамедов[1], Л. К. Асадова[2]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
e-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Резюме. Рассматривается задача Коши для цепочки Вольтерра с периодическим начальным условием. Доказана глобальная разрешимость задачи в некотором классе. Изучена связь между решениями полубесконечной и бесконечной в обе стороны цепочек.

Ключевые слова: цепочка Вольтерра, глобальная разрешимость, периодическое решение, задача Коши.

AMS Subject Classification: 34A34, 35C07, 35C08, 35B10, 35C09.

1. Введение

Цепочка Вольтерра, имеющая (см.,напр., [5] и литературу в ней) разные приложения, в контексте теории интегрируемости является активным предметом изучения уже в течении ряда лет(см.[1, 3, 5,6]). Известно, что бесконечная в обе стороны цепочка Вольтерра с периодическим начальным условием имеет периодическое решение[1, 3, 5].

Для последовательности положительных функций $a_n = a_n(t), a_n \in C^{(1)}(0,\infty)$ рассмотрим следующую задачу Коши для полубесконечной цепочки Вольтерра

$$\dot{a}_n(t) = \frac{1}{2} a_n(t)(a_{n-1}(t) - a_{n+1}(t)), n \geq 0, a_{-1}(t) = 0, \cdot = \frac{d}{dt} \qquad (1)$$

$$a_n(0) = \hat{a}_n, \hat{a}_{n+N} = \hat{a}_n, n \geq 0 \qquad (2)$$

где N - фиксированное натуральное число. Заметим, что для задачи (1), (2) периодическое решение отсутствует. С физической точки зрения интересным является вопрос о существовании решения задачи (1), (2) мало отличающегося от периодического.

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать задачу Коши бесконечной в обе стороны цепочки Вольтерра

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 07.04.2015

$$\dot{a}_n(t) = \frac{1}{2} a_n(t)\left(a_{n-1}(t) - a_{n+1}(t)\right), n \in Z, \cdot = \frac{d}{dt} \tag{3}$$

$$a_n(0) = \hat{a}_n, \hat{a}_{n+N} = \hat{a}_n, n \in Z \tag{4}$$

где начальное условие (4) является продолжением последовательности (2) на всю ось.

Обозначим через $\hat{a}_n(t)$ решение периодической задачи (3), (4). Пусть $\rho(n)$- любая положительная бесконечно большая последовательность. Считая, что $\hat{a}_n(t)$ известно, будем искать такое решение $a_n(t) = \hat{a}_n(t) + x_n(t)$задачи (1), (2), что последовательность $x_n(t)$ удовлетворяет условию

$$\left\| \sum_{n \geq 0} \rho(n) |x_n(t)| \right\|_{C[0,T]} < \infty \tag{5}$$

для всех $T > 0$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. Задача (1), (2) имеет единственное решение в классе (5).

Доказательство. Подставляя в уравнение (1) вместо $a_n(t)$ его представление $a_n(t) = \hat{a}_n(t) + x_n(t)$, после несложных преобразований находим, что задача (1), (2) эквивалентна задаче

$$\begin{gathered} \dot{x}_0(t) = \left(\hat{a}_1(t) + x_1(t)\right)x_0(t) - \hat{a}_0(t)x_1(t) - \hat{a}_0(t)\hat{a}_{N-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) = x_n(t)\left(x_{n-1}(t) - x_{n+1}(t)\right) + \left(\hat{a}_{n-1}(t) - \hat{a}_{n+1}(t)\right)x_n(t) + \\ \hat{a}_n(t)\left(x_{n-1}(t) - x_{n+1}(t)\right), n \geq 1 \end{gathered} \tag{6}$$

$$x_n(0) = 0 \tag{7}$$

Рассмотрим банахово пространство B последовательностей $y = \{y_n\}_0^\infty$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n \geq 0} \rho(n)|y_n| < \infty$, с нормой

$$\|y\|_B = \sum_{n \geq 0} \rho(n)|y_n|$$

Тогда множество $C([0,T]; B)$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ со значениями в B функций также является [4] банаховым пространством.

Перепишем задачу (6), (7) в виде операторного уравнения

$$x(t) = \int_0^t \Re(x(\tau))d\tau \tag{8}$$

где $x(t) = (x_n(t))_0^\infty, \Re$ есть оператор, порожденный правой частью системы уравнений (6). При каждом $T > 0$ оператор $\Re$, очевидно, непрерывно дифференцируемо отображает пространство $C([0,T];B)$ в себя. Используя принцип сжатых отображений найдем, что на некотором отрезке $[0,\delta]$ существует единственное решение $x(t)=\{x_n(t)\}_0^{+\infty}$ с конечной нормой $\|x(t)\|_{C([0,\delta];B)}<\infty$. Докажем, что это решение продолжено на отрезок $[0,T]$. Допустим противное. Тогда существует точка $t^*<T$ такая, что задача (6), (7) имеет непрерывное на интервале $(0,t^*)$ решение $x(t)=(x_n(t))_0^\infty$, но $\overline{\lim_{t\to t^*-0}}\|x(t)\|_B=+\infty$.

Из (6) имеем

$$x_0(t)=-\int_0^t\hat{a}_0(\tau)\hat{a}_{N-1}(\tau)d\tau-\int_0^t\hat{a}_0(\tau)x_1(\tau)d\tau+\int_0^t(\hat{a}_1(\tau)+x_1(\tau))x_0(\tau)d\tau$$

$$\begin{gathered}x_n(t)=\int_0^t x_n(\tau)(x_{n-1}(\tau)-x_{n+1}(\tau))d\tau+\int_0^t(\hat{a}_{n-1}(\tau)-\hat{a}_{n+1}(\tau))x_n(t)d\tau+\\ \int_0^t\hat{a}_n(t)(x_{n-1}(t)-x_{n+1}(t))d\tau,\ t\in(0,t^*),\ n\geq 1\end{gathered}\tag{9}$$

Известно, [1,2] что задача (1), (2) имеет единственное решение $a_n(t)$ ограниченное равномерно по t на каждом конечном отрезке: $|a_n(t)|<L, n\geq 0, t\in[0,T]$. Так как функции $\hat{a}_{n+N}(t)=\hat{a}_n(t)$ непрерывны на отрезке $[0,T]$, то задача (6), (7) имеет единственное решение (его тоже обозначим через $x_n(t)$), ограниченное равномерно по t на каждом конечном отрезке: $|x_n(t)|<M, n\geq 0, t\in[0,T]$. Полагая тогда $C=\max_{0\leq k\leq N-1}\hat{a}_k(t)$ при помощи равенств (9) найдем, что

$$\|x(t)\|_B\leq C^2T+3(M+2C)\int_0^t\|x(\tau)\|_B\,d\tau,\ t\in(0,t^*).$$

Учитывая лемму Гроноулля, из последнего неравенство получаем

$$\|x(t)\|_B\leq C^2T\exp(3T(M+2C)),\ t\in(0,t^*),$$

которое, противоречит нашему предположению. Следовательно, задача (6), (7) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное решение $x(t)=(x_n(t))_0^\infty$ с конечной нормой $\|x(t)\|_{C([0,T];B)}<\infty$.

Теорема доказана.

Замечание. Как отмечалось выше полубесконечная цепочка Вольтерра с периодическим начальным условием не имеет периодического решения. К тому же, доказанная теорема показывает, что решение упомянутой цепочки «достаточно мало отличается» от периодического решения соответствующей цепочки на всей оси.

Литература

1. Teschl G., Jacobi Operators and Completely Inteqrable Nonlinear Lattics American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.
2. Березанский Ю.М., Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи, ДАН СССР, 1985, т.281, No 1, с.16-19.
3. Кас M., van Moerbeke P. On some periodic Toda lattices, Proc Nat. Acad. Sci., Vol.72, No 4, 1975, pp.1627-1629.
4. Крейн С.Г. Линейные Дифференциальные Уравнения в Банаховом Пространстве, М.: Наука, 1967, 464 с.
5. Тода М., Теория Нелинейных Решеток, М.: Мир, 1983, 262 с.
6. Ханмамедов Аг.Х. О глобальной разрешимости задачи Коши для одной бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений, Дифференциальные Уравнения, 2010, т.46, No.2, с.1113-1116.

Periodik başlanğıc şərtli Volter zənciri üçün Koşi məsələsi

XÜLASƏ

İşdə periodik başlanğıc şərtli Volter zənciri üçün Koşi məsələsinə baxılır. Müəyyən sinifdə məsələnin qlobal həll olunanlığı isbat edilir. Zəncirin hər iki tərəfə sonlu və sonsuz halında həllər arasında əlaqə öyrənilir.

Açar sözlər: Volterra zənciri, qlobal həll olnanlıq, periodik həll, Koşi məsələsi.

A Cauchy problem for the semiimfinite Volterra chain with periodic initial condition

ABSTRACT

In the work a Cauchy problem for the Volterra chain with periodic initial condition is considered. The solvability of this problem is proved in some class. The relation between solutions of finite and infinite chains is stadied.

Keywords: Volterra chain, global solvability, periodic solution, Cauchy problem.